

# MODEL PLOCHY KONSTANTNÍ PŘESNOSTI PRO HODNOCENÍ METOD 3D MAPOVÁNÍ V GEOGRAFII

R. Dušek, R. Kadlubiec

Katedra fyzické geografie a geokologie, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita

## Abstrakt

Cílem příspěvku je pro geodetickou úlohu prostorového protínání (měřeny vodorovné směry a svislé úhly ze dvou bodů) najít takovou plochu, jejíž body budou mít konstantní polohovou přesnost. Výpočet přesnosti probíhá v diskrétních bodech prostorové mřížky. Pro každý bod je na základě parametrů použitého měření vypočtena kovarianční matice a z jejích prvků následně polohová přesnost bodu. Prostorovou interpolací mezi body mřížky jsou nalezeny plochy konstantní přesnosti pro konkrétní hodnoty polohových směrodatných odchylek. Na základě studia průběhů těchto ploch je možné navrhnout povrchy vhodné pro testování přesnosti současných metod 3D mapování v geografii.

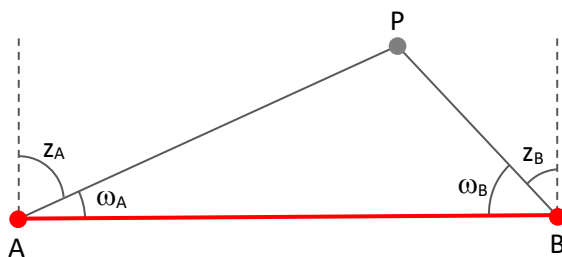
## 1 Úvod

Klasické geodetické metody určování prostorových souřadnic bodů při geografickém mapování byly nahrazeny moderními technologiemi, zejména laserovým skenováním (LIDAR), průřezovou fotogrammetrií (metoda Structure from Motion) a digitální stereofotogrammetrií. Tyto metody mapování jsou natolik technologicky i výpočetně složité, že určovat přesnost dosažených výsledků aplikací zákonů hromadění chyb – jak bylo běžné u geodetických úloh – již není možné. Na přesnost metod lze usuzovat pouze srovnáváním dosažených výsledků s výsledky získaných jinou, přesnější metodou. Mezi tyto referenční metody patří zejména geodetická měření, která mohou dosahovat řádově vyšších přesností určení prostorové polohy bodu, než výše uvedené metody. I přesto, že jsou geodetické metody přesnější, nejsou absolutně přesné a pro analýzu přesnosti je vhodné, aby všechny měřené body byly geodeticky určeny se stejnou (nebo alespoň srovnatelnou) přesností. Je tedy vhodné provést testování na takové ploše (povrchu), jehož body budou mít shodnou přesnost určení polohy.

K určení přesnosti jednotlivých bodů lze přistupovat různými způsoby. Je např. možné zjišťovat přesnost bodu v konkrétním směru. Tento přístup se uplatní např. při monitoringu posunu bodů v určitém směru. V tomto případě by z kovarianční matice byly počítány parametry Helmertovy plochy a její průvodiče v požadovaném směru [1]. Tento postup byl například použit pro analýzy geomorfologických dat v [2]. Pokud při mapování není preferován určitý směr, lze z kovarianční matice počítat přímo polohovou chybu jako odmocninu z její stopy. Tento postup byl použit v následujících výpočtech.

## 2 Teorie geodetické úlohy

Principem geodetických úloh je určování polohy neznámých bodů na základě známé polohy daných bodů a provedení měření. Pro cíle popsané výše byla zvolena úloha prostorového protínání, kdy ze dvou známých bodů (A, B – viz obr. 1) jsou měřeny vodorovné úhly ( $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ) a svislé, tzv. zenitové úhly ( $Z_A$ ,  $Z_B$ ). I přes rozvoj elektronických dálkoměrů je stále úhlové měření přesnější a je tedy výhodné zvolit metodu, která nevyžaduje měření délek (jako by například byl početně jednodušší rajón).



Obrázek 1: Geometrický princip určení polohy bodu P (podrobnosti v textu)

Pro stanovení přesnosti určovaného bodu je možné použít tzv. model geodetické úlohy (MGÚ), což je obecný postup výpočtu kovarianční matice bez ohledu na konkrétní úlohu a její konfiguraci (rozmístění bodů), který vychází z obecného zákona hromadění chyb [3]. MGÚ je teoreticky popsán v [4] nebo [5] a využit pro řešení konkrétních problémů geodetické praxe např. v [6] a [7].

Kovarianční matice určovaného bodu ( $\mathbf{M}_P$ ) se vypočte ze vztahu:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T \quad (1)$$

kde  $\mathbf{M}$  je kovarianční matice měření obsahující čtverce směrodatných odchylek měřených veličin a  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .

Matice  $\mathbf{A}$  je tzv. Jacobiho matice zohledňující rozložení bodů geodetické úlohy. Obsahuje derivace měřených veličin podle souřadnic určovaného bodu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_A}{\partial X_P} & \frac{\partial z_A}{\partial Y_P} & \frac{\partial z_A}{\partial Z_P} \\ \frac{\partial z_B}{\partial X_P} & \frac{\partial z_B}{\partial Y_P} & \frac{\partial z_B}{\partial Z_P} \\ \frac{\partial \omega_A}{\partial X_P} & \frac{\partial \omega_A}{\partial Y_P} & \frac{\partial \omega_A}{\partial Z_P} \\ \frac{\partial \omega_B}{\partial X_P} & \frac{\partial \omega_B}{\partial Y_P} & \frac{\partial \omega_B}{\partial Z_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta Z_{PA} \cdot \Delta X_{PA}}{s_{PA}^2 \cdot d_{PA}} \cdot \rho & \frac{\Delta Z_{PA} \cdot \Delta Y_{PA}}{s_{PA}^2 \cdot d_{PA}} \cdot \rho & -\frac{d_{PA}}{s_{PA}^2} \cdot \rho \\ \frac{\Delta Z_{PB} \cdot \Delta X_{PB}}{s_{PB}^2 \cdot d_{PB}} \cdot \rho & \frac{\Delta Z_{PB} \cdot \Delta Y_{PB}}{s_{PB}^2 \cdot d_{PB}} \cdot \rho & -\frac{d_{PB}}{s_{PB}^2} \cdot \rho \\ \frac{\Delta Y_{PA}}{d_{PA}^2} \cdot \rho & -\frac{\Delta X_{PA}}{d_{PA}^2} \cdot \rho & 0 \\ \frac{\Delta Y_{PB}}{d_{PB}^2} \cdot \rho & -\frac{\Delta X_{PB}}{d_{PB}^2} \cdot \rho & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

kde

X, Y, Z jsou pravoúhlé souřadnice,

$\Delta$  je symbol pro rozdíl,

s, d je šikmá a vodorovná délka,

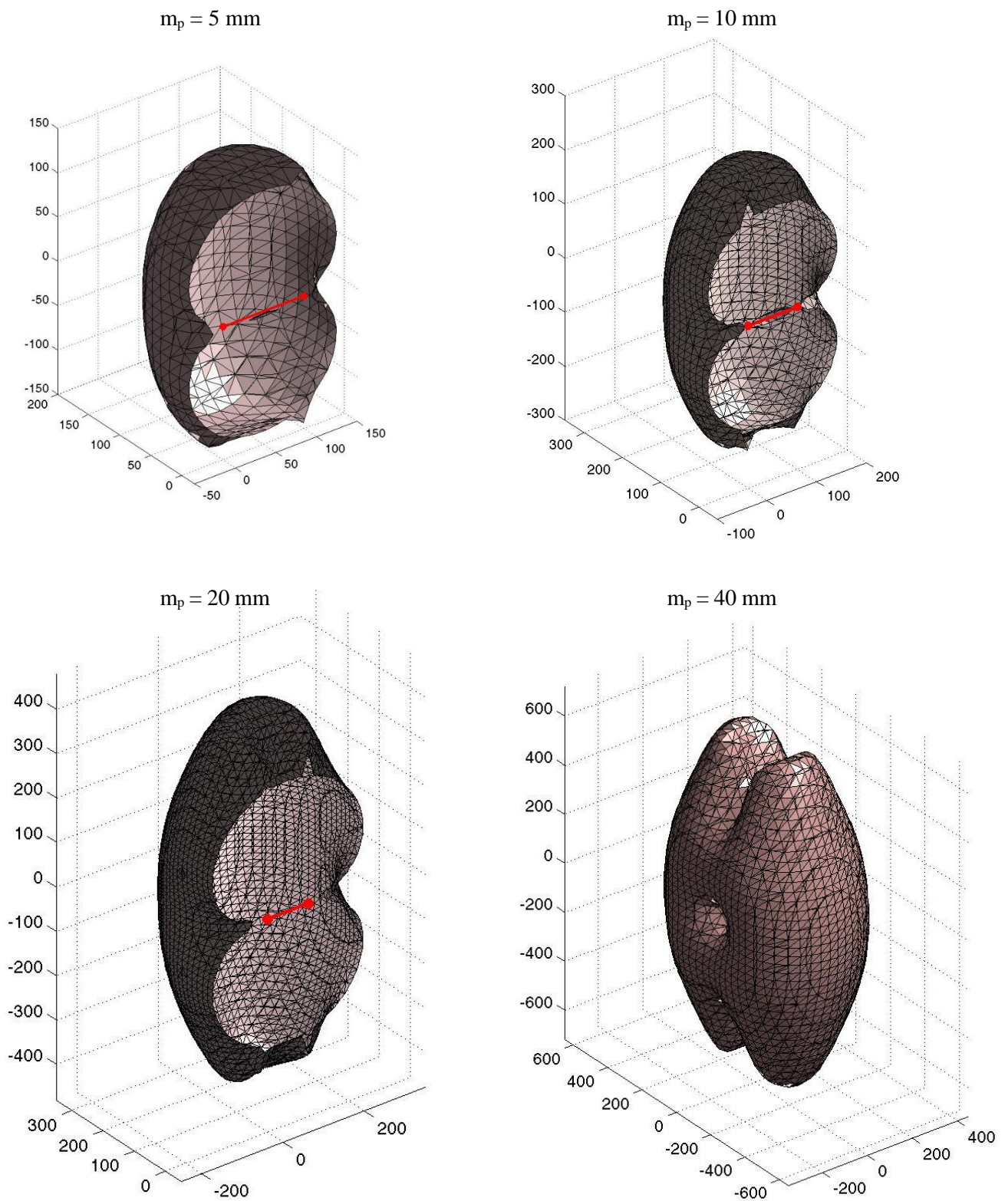
$\rho$  hodnota radiánu ve stejných jednotkách jako jsou přesnosti úhlů v matici  $\mathbf{M}$ .

V případě zvoleného způsobu určení bodu jsou měřeny čtyři veličiny, ale určovány pouze tři souřadnice bodu P. Matice  $\mathbf{A}$  je potom obdélníková a není možné provádět její inverzi. Pro řešení vztahu (1) je možné použít výpočet pseudoinverzní matice rozkladem na singulární hodnoty – též singulární rozklad (SVD; Singular values decomposition). Postup je popsán v četné matematické literatuře (např. [8]) a používán v mnoha oblastech zpracování dat. Principem je nalezení matice  $\mathbf{A}^+$  takové, že  $\mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$  (jednotková matice). Ve vztahu (1) potom bude  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^+$ .

### 3 Řešení

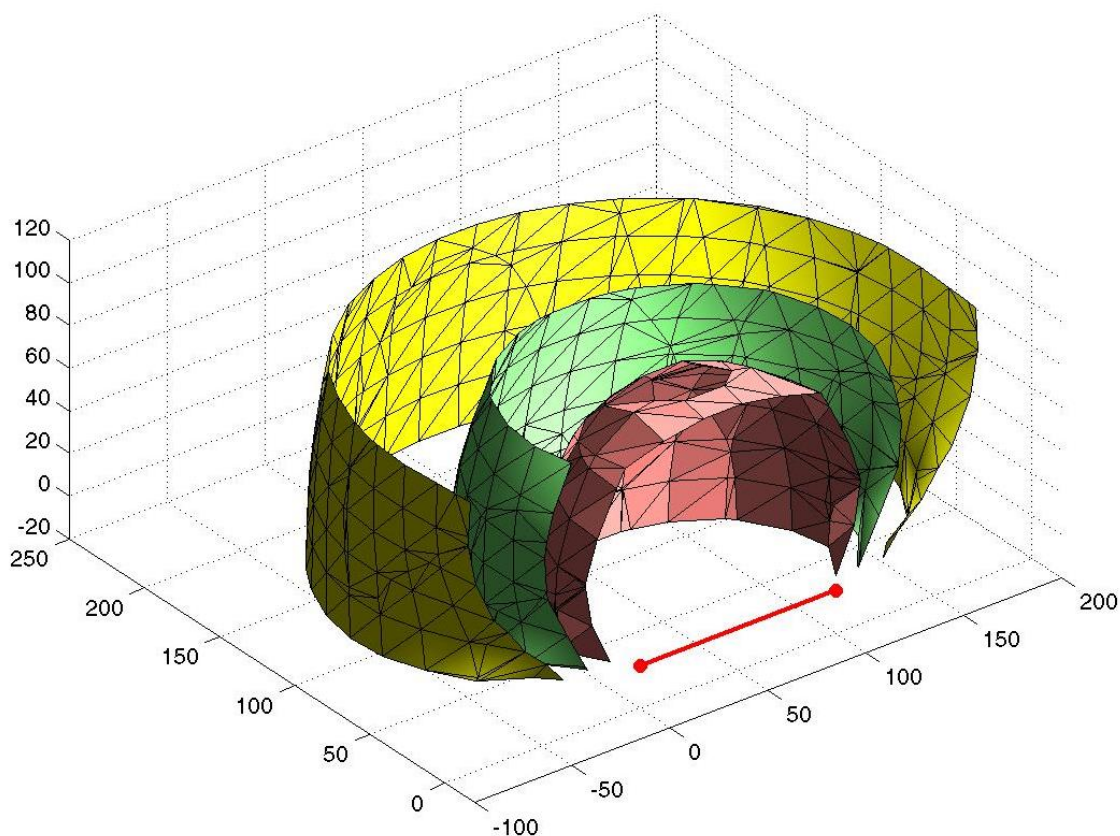
Pro numerické řešení byla zvolena vzdálenost bodů AB 100 m, přesnost měřených úhlů  $m_\omega = m_z = 0,01$  gon. Pro řešení byly využity funkce Matlabu, zejména `svd()` pro singulární rozklad a `isosurface()` a `isonormals()` pro nalezení izoploch.

Na obr. 2 jsou znázorněny vypočtené plochy konstantní přesnosti pro polohovou chybu  $m_p = 5, 10, 20$  a 40 mm. Z obrázků je patrné, že pro malé hodnoty polohové chyby se plocha tvarem blíží elipsoidu, se zvyšující se hodnotou chyby se ve svislém směru protahuje. Výsledné plochy (situace pro chybu 40 mm) jsou uzavřené a symetrické podle svislých rovin procházejících základnou AB a její osou. Pro chyby 5, 10 a 20 jsou znázorněny poloviny ploch tak, aby byla patrná poloha a délka základny AB – červená úsečka.



Obrázek 2: Izoplochy konstantní přesnosti pro uvedené polohové chyby.

Průběhy ploch znázorněné na obr. 2 jsou výsledkem teoretického modelového řešení, ale pro praktický účel srovnávání s dalšími metodami je možné je využít pouze v malém prostoru v okolí základny AB, který je přístupný reálnému měření. Situace v tomto prostoru je zachycena na obr. 3



Obr. 3 Průběh izoploch konstantní přesnosti v okolí základny AB (červená úsečka). Červená plocha pro polohovou chybu 3 mm, zelená 5 mm, žlutá 10 mm.

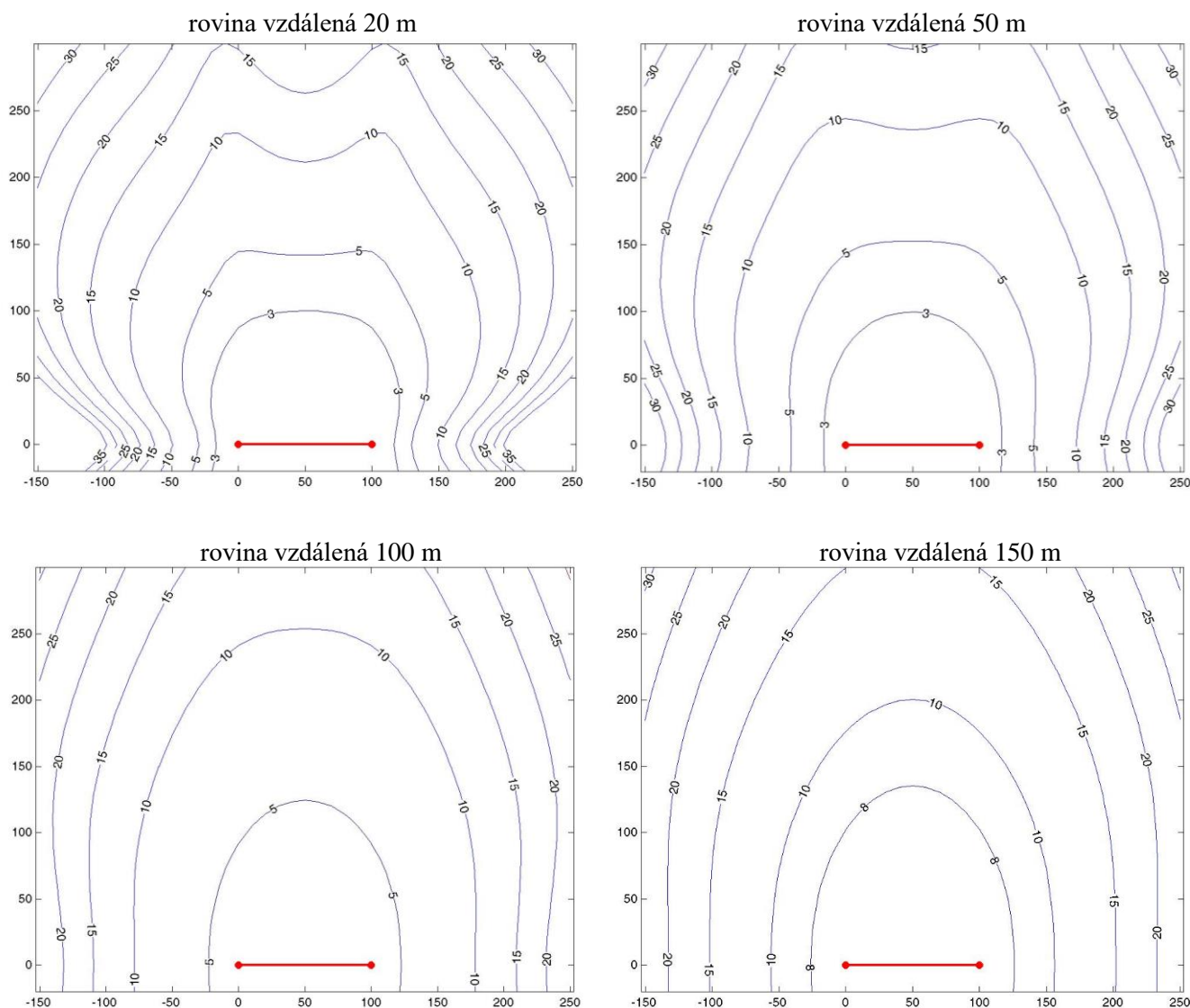
Na obr. 3 je patrné, že v blízkosti základny AB mají izoplochy svislý průběh. I přes jejich zakřivení je v prostoru šířky základny možné je nahradit svislou rovinou. Takové nahrazení by bylo výhodné, protože svislou rovinu je možné snadno realizovat průčelím budovy nebo svislou skalní stěnou. Vhodnost nahrazení ploch konstantní přesnosti v daném místě svislými rovinami je možné ověřit zkonstruováním svislých rovin a jejich průsečnic s izoplochami.

Pro ověření byly zvoleny čtyři svislé roviny vzdálené od základny 20, 50, 100 a 150 m. Na obr. 4 jsou znázorněny průsečnice izoploch s těmito rovinami. Průsečnice ve formě izolinií jsou popsány hodnotami polohových chyb. Z obrázků je patrné, že rovina ve vzdálenosti 20 m není vhodnou náhradou, ve střední části jsou sice chyby malé, ale jejich hodnota rychle narůstá směrem ke všem rohům. Rovina v 50m vzdálenosti má průběh izolinií příznivější a jejich maximální hodnoty jsou menší, ale nárůst hodnot je stále velký. Ve vzdálenosti 100 m se sice zvedla minimální hodnota, ale izolinie 10 a 15 mm ohraničují rozsáhlý prostor „rozumného“ oválného tvaru s pomalejším nárůstem. Pro vzdálenost 150 m je již patrný pokles velikosti středního prostoru ohraničeného izolinií 10.

Na základě předchozího je patrné, že pro náhradu izoploch je nejvhodnější svislá rovina ve vzdálenosti cca 100 m od základny. Při využití oválného středu takové roviny nebude přesnost polohy bodů určená geodetickým protínáním větší než 10 až 15 mm.

#### 4 Závěr

Prezentovaný příklad hodnocení přesnosti určování polohy bodů při geografickém mapování ukazuje vhodnost použitých teoretických modelů i pro zcela praktické úlohy. Jako výhodný způsob analýzy se ukazuje využít kombinaci numerických výpočtů a názorné vizualizace.



Obr. 4 Řezy izoploch svislými rovina v uvedených vzdálenostech od základny AB.

## Literatura

- [1] R. Dušek. Helmertova křivka v trojrozměrném prostoru. *Geodetický a kartografický obzor*. 2004. roč. 50, č. 9, s. 174–179. ISSN 0016-7096.
- [2] R. Dušek, M. Drozdek. *Modelování přesnosti geomorfologických dat*. In Sborník příspěvků Technical Computing Prague 2006. Praha, 2006. Dostupné z: <http://www.humusoft.cz/archive/events/tcp2006/>
- [3] J. Böhm, V. Radouch, M. Hampacher. *Teorie chyb a vyrovnávací počet*. 2. upravené vydání. Praha: Geodetický a kartografický podnik, 1990. 416 s. ISBN 80-7011-056-2
- [4] J. Jandourek. *Geodézie IV: úprava měřených veličin před výpočty, geodetická úloha a její kvalitativní hodnocení*. Praha: ČVUT, 1995. 149 s. ISBN 80-01-01330-8
- [5] R. Dušek, J. Vlasák. *Geodézie 40*. ČVUT, Praha, 1998, 127 s.
- [6] R. Dušek. *Užití systému MATLAB pro stanovení vlivu konfigurace na přesnost geodetických úloh*. In MATLAB 2003. Sborník příspěvků 11. ročníku konference. Praha: VŠCHT, 2003. s. 113–116. ISBN 80-7080-526-9

- [7] M. Mudra. *Posouzení přesnosti přechodného stanoviska určeného z minimálního počtu daných bodů a měřených veličin*. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava. Řada hornicko-geologická. Volume L (2004), No. 2, p. 39–48, ISSN 0474-8476
- [8] E. Krajník. *Maticový počet*. ČVUT, Praha, 1998, 129 s.
- 

Radek Dušek  
radek.dusek@osu.cz

Radek Kadlubiec  
radek.kadlubiec@gmail.com