OBJEKTOVÝ NÁSTROJ PRO PRÁCI S AFINNÍMI PODPROSTORY

D. Majerová

České vysoké učení technické v Praze, fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
katedra softwarového inženýrství v ekonomii

Abstrakt

Tento příspěvek se týká afinních podprostorů euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) a implementace třídy `afprostor` v MATLABu. Po definicích základních pojmů je uveden částečný popis implementace třídy `afprostor` (konstruktor, přetížené operátory a významné metody) a praktické ukázky jejího použití. Knihovna `afprostor` obsahuje jedinou třídu `afprostor` a může sloužit jako nástroj pro ověření výsledků úloh, které se týkají afinních podprostorů, například: určení dimenze, nalezení směrových nebo normálových vektorů, převod afinního obalu bodů na směrovou rovnici afinního podprostoru či nalezení průniku nebo součtu dvou afinních podprostorů.

1 Přehled základních pojmů

V tabulce 1 je uveden přehled použitých symbolů, které jsou v tomto příspěvku používány. Dále definujme následující pojmy z oblasti lineární algebry:

- *aritmetický vektorový prostor* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad tělesem reálných čísel je vektorový prostor s nosičem $\mathbb{R}^n$, kde pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ a $a \in \mathbb{R}$ jsou definovány operace *sčítání vektorů* a *násobení vektoru skalárem* „po složkách“:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$a\boldsymbol{x} = a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n),$$

- *vektorový podprostor* je každá neprázdná podmnožina P množiny $\mathbb{R}^n$, kde platí:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P,\ a, b \in \mathbb{R}) \ \Rightarrow\ (a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in P),$$

- vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ ($k \in \mathbb{N}$) nazveme *lineárně nezávislé*, jestliže

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0} \right) \ \Rightarrow\ (a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge \ldots \wedge a_n = 0)$$

  (pokud vektory nejsou lineárně nezávislé, nazveme je *lineárně závislé*),

Tabulka 1: Přehled použitých symbolů

Symbol	**Význam**
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$	aritmetický vektorový prostor
$\boldsymbol{x}$	vektor, n-tice reálných čísel: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\boldsymbol{0}$	nulový vektor
a	skalár (reálné číslo)
$\mathbb{E}_n$	euklidovský prostor dimenze n
$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$	standardní skalární součin

- *lineární obal* vektorů $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ je množina
$$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{x}_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$
Lineární obal je vždy vektorovým podprostorem. Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ se nazývají *generátory* daného podprostoru,

- *báze podprostoru* je uspořádaná množina lineárně nezávislých generátorů daného podprostoru. Každé dvě báze téhož podprostoru mají stejný počet prvků. Tento počet se nazývá *dimenze podprostoru.* Nemá-li podprostor P bázi, pak formálně definujeme $\dim P = 0$,

- *standardní skalární součin* vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ je zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definované vztahem
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

- *norma* vektoru je zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}_0^+$ definované vztahem $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$,

- *euklidovský prostor* $\mathbb{E}_n$ je aritmetický vektorový prostor $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ se standardním skalárním součinem,

- *ortogonální doplněk* podprostoru P je množina $P^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid (\forall \boldsymbol{y} \in P)\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0\}$.

2 Afinní podprostory

V obecném vektorovém prostoru je nejdůležitějším pojmem podprostor (a jeho báze a dimenze). Každý podprostor je lineární útvar, který obsahuje minimálně nulový vektor. Geometricky si vektorový podprostor můžeme představit jako lineární útvar procházející počátkem soustavy souřadnic, tedy „samotný“ nulový vektor (tzv. triviální podprostor), přímky procházející počátkem, roviny procházející počátkem atd.

Pojem vektorového prostoru lze zobecnit na afinní podprostor, tedy body, přímky, roviny atd., které nemusejí obsahovat nulový vektor.

V euklidovském prostoru $\mathbb{E}_n$ pracujeme převážně s body. Z didaktického pohledu by bylo vhodné formálně odlišovat body od vektorů (například uvádět souřadnice bodů v hranatých závorkách a souřadnice vektorů v kulatých závorkách), avšak z pohledu práce v MATLABu jsou body i vektory pole čísel (také při implementaci třídy `afprostor` bude zápis bodů i vektorů totožný). Proto nebudu body a vektory v dalším textu rozlišovat.

2.1 Definice afinního podprostoru

Nejprve uvedeme pomocný pojem – spojnice dvou bodů.

Definice 1. *Spojnicí bodů* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{E}_n$ nazveme množinu $\underline{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}} = \{\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Geometricky se jedná o přímku procházející oběma body. Pokud jsou tyto body totožné, jedná se o jednobodovou množinu: $\underline{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{x}\}$.

Definice 2. Nechť L je neprázdná podmnožina prostoru $\mathbb{E}_n$. Jestliže L s každými dvěma body obsahuje jejich spojnici, neboli $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L) \Rightarrow \left(\underline{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}} \subset L\right)$, potom množinu L nazveme *afinní podprostor* prostoru $\mathbb{E}_n$.

Kromě pojmu **afinní podprostor** se používají také názvy *lineární množina*, *lineární varieta* nebo *lineál.*

Lze dokázat, že ke každému afinnímu podprostoru L existuje právě jeden vektorový podprostor S takový, že $L = \boldsymbol{a} + S$, kde $\boldsymbol{a} \in L$ ($\boldsymbol{a}$ je libovolný bod afinního podprostoru L). Naopak platí, že každá množina tvaru $L = \boldsymbol{a} + S$ (kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{E}_n$ a S je podprostor $\mathbb{R}^n$) je afinním podprostorem prostoru $\mathbb{E}_n$.

Dále platí, že každý vektorový podprostor je afinním podprostorem. Obrácená implikace neplatí, ale pokud afinní podprostor obsahuje nulový vektor (tj. prochází počátkem soustavy souřadnic), tak je vektorovým podprostorem.

Definice 3. Je-li $L = \boldsymbol{a} + S$ afinním prostorem, pak vektorový podprostor S nazveme *směrovým podprostorem* (též *směrem* nebo *zaměřením*) afinního podprostoru L. Vektory v S se nazývají *směrové vektory* afinního podprostoru L. Ortogonální doplněk směrového podprostoru S se nazývá *normálový podprostor* afinního podprostoru L (a značí se $S^{\perp}$). Jeho vektory nazýváme *normálové vektory* afinního podprostoru L.

Definice 4. *Dimenzí afinního podprostoru* $L = \boldsymbol{a} + S$ nazveme dimenzi jeho zaměření:

$$\dim L = \dim S.$$

Jestliže $\dim L = 0$, je to *bod.* Jestliže $\dim L = 1$, jde o *přímku.* Jestliže $\dim L = 2$, nazývá se L *rovina.* Afinní podprostor s dimenzí rovnou $n - 1$ se nazývá *nadrovina.*

Často se říká, že „přímka je určena dvěma různými body“ nebo že „rovina je určena třemi body, které neleží na jedné přímce“. Z toho důvodu uvedeme ještě dva pojmy.

Definice 5. Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{E}_n$ ($k \in \mathbf{N}$). Výraz $\sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{x}_i$, kde $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, nazýváme *afinní lineární kombinace* bodů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ (s koeficienty $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$).
Množinu všech afinních kombinací daných bodů nazýváme *afinní obal* těchto bodů a značíme ji $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k]_\alpha$.

Výsledkem afinní lineární kombinace je vždy bod z $\mathbb{E}_n$.

Lze dokázat, že každý afinní obal bodů je afinním podprostorem, neboť platí:

$$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k]_\alpha = \boldsymbol{x}_1 + [\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_1],$$

přičemž dimenze afinního podprostoru je nanejvýš rovna $k - 1$. Dále lze ukázat, že každý afinní podprostor lze zapsat jako afinní obal (jeho) bodů.

2.2 Různé způsoby vyjádření afinního podprostoru

Z výše uvedených definic je vidět, že afinní podprostor můžeme vyjádřit několika způsoby:

1. **parametrické vyjádření** (směrová rovnice):

$$L = \boldsymbol{a} + S$$

   neboli $L = \boldsymbol{a} + [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$, kde $\boldsymbol{a} \in L$ a $S = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$ je zaměření L.

2. **soustava normálových rovnic** (neparametrické vyjádření):

$$L \equiv \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

   kde řádky matice $\boldsymbol{A}$ tvoří normálové vektory $\boldsymbol{n}_j \in S^{\perp}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $b_j = \langle \boldsymbol{n}_j, \boldsymbol{a} \rangle$ (pro $j = 1, 2, \ldots, n - \dim L$), přičemž $L = \boldsymbol{a} + S$.

3. pomocí **afinního obalu bodů**:

$$L = [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]_\alpha, \quad \text{kde} \ \ \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in L.$$

Zadání pomocí soustavy normálových rovnic ukazuje, že afinní podprostor je řešením soustavy lineárních rovnic (pokud soustava řešení má). Jinými slovy, pokud má soustava lineárních rovnic řešení, lze jej psát ve tvaru $L = \boldsymbol{a} + S$, kde $\boldsymbol{a}$ se nazývá *partikulární řešení* a S se nazývá *podprostor všech řešení homogenní soustavy* se stejnou maticí: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

Zadání afinního podprostoru dimenze k pomocí afinního obalu bodů vyžaduje $k+1$ afinně nezávislých bodů, tj. bodů, pro které $\dim[\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0, \ldots,\ \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0] = k$. Tato forma zadání se snadno převede na směrovou rovnici:

$$L = [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]_\alpha = \underbrace{\boldsymbol{x}_0}_{\boldsymbol{a}} + \underbrace{[\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0, \ldots, \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0]}_{S}.$$

2.3 Prvky afinního podprostoru

Prvky afinního podprostoru jsou body. To, zda je bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n$ prvkem afinního podprostoru, uvádějí následující tvrzení:

1. parametricky zadaný afinní podprostor: $(\boldsymbol{x} \in L) \ \Leftrightarrow\ \left((\exists t_i \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{x}_i\right)$
2. afinní podprostor zadaný soustavou normálových rovnic: $(\boldsymbol{x} \in L) \ \Leftrightarrow\ (\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b})$
3. afinní podprostor zadaný pomocí afinního obalu bodů $\boldsymbol{x}_0, \ldots, \boldsymbol{x}_k$:
   $(\boldsymbol{x} \in L) \ \Leftrightarrow\ \left((\exists t_i \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{k} t_i \boldsymbol{x}_i \ \wedge\ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\right)$

2.4 Průnik a součet afinních podprostorů

Průnikem afinních podprostorů L_1 a L_2 nazveme množinu

$$L_1 \cap L_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \,|\, \boldsymbol{x} \in L_1 \wedge \boldsymbol{x} \in L_2\}.$$

Lze dokázat, že průnik dvou afinních podprostorů je buď prázdná množina, anebo afinní podprostor.

Součtem afinních podprostorů $L_1 = \boldsymbol{a}_1 + S_1$ a $L_2 = \boldsymbol{a}_2 + S_2$ nazveme množinu

$$L_1 + L_2 = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + (S_1 + S_2),$$

kde $S_1 + S_2 = \{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \mid \boldsymbol{x}_1 \in S_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in S_2\}$ (součet vektorových podprostorů). Lze dokázat, že součet dvou afinních podprostorů je vždy afinní podprostor.

2.5 Vzájemná poloha afinních podprostorů

Mějme dva afinní podprostory $L_1 = \boldsymbol{a}_1 + S_1$ a $L_2 = \boldsymbol{a}_2 + S_2$. Jejich vzájemná poloha se určuje podle směrových podprostorů a průniku.

Řekneme, že L_1 a L_2 jsou *rovnoběžné*, jestliže S_1 je vektorovým podprostorem S_2 (resp. S_2 je podprostorem S_1). Tento případ zahrnuje možnosti $L_1 = L_2$ (jsou totožné), $L_1 \subset L_2$ (nebo naopak, tj. jeden leží ve druhém) a rovnoběžnost, kdy průnik $L_1 \cap L_2$ je prázdný.

Řekneme, že L_1 a L_2 jsou *různoběžné*, jestliže nejsou rovnoběžné. Pokud navíc $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, tak řekneme, že $L_1,\ L_2$ jsou *mimoběžné*.

3 Popis implementace

3.1 Cíle

Knihovna `afprostor` by měla umožňovat:

- vytvoření afinního podprostoru pomocí všech tří vyjádření,
- nalezení báze směrového podprostoru,
- určení dimenze afinního podprostoru,
- určení druhu afinního podprostoru (bod, přímka, rovina, nadrovina, $\mathbb{E}_n$),
- nalezení báze normálového podprostoru,
- převod mezi různými způsoby vyjádření afinního podprostoru, včetně možnosti úpravy některé z normálových rovnic (vynásobení nenulovým číslem),
- zjištění, zda zadaný bod je prvkem afinního podprostoru,
- nalezení průniku dvou afinních podprostorů (pokud existuje),
- nalezení součtu dvou afinních podprostorů,
- výpis afinního podprostoru ve formátu sázecího systému LaTeX,
- vykreslení afinního podprostoru v $\mathbb{E}_2$ nebo $\mathbb{E}_3$,
- zjištění vzájemné polohy dvou afinních podprostorů,
- určení vzdálenosti dvou afinních podprostorů.

3.2 Návrh třídy `afprostor`

Knihovna `afprostor` sestává z konstruktoru `afprostor` a 18 metod. Třída `afprostor` obsahuje 11 vlastností (atributů), jejichž význam je uveden v tabulce 2. Přehled všech metod je uveden v tabulce 3 – metody jsou rozděleny podle typu činnosti. Všechny funkce a metody jsou opatřeny nápovědou. Zdrojové kódy jsou okomentované.

Některé metody, především pro výpočet některých vlastností třídy `afprostor` a výpis afinního podprostoru (resp. konverzi objektu na řetězec), využívají privátní funkce uvedené v tabulce 4.

Při práci s maticemi jsou za souřadnice bodů (resp. vektorů) považovány *řádky*.

Knihovna byla implementována a testována v prostředí MATLABu 7.1, a proto nevyužívá nový objektový model (ten je k dispozici od verze 7.6). Všechny metody včetně konstruktoru s definicí třídy jsou umístěny v podadresáři `@afprostor`.

Při implementaci byly použity matlabovské funkce `rank` (určení hodnosti matice, resp. dimenze vektorového podprostoru), `null` (nalezení báze řešení homogenní soustavy lineárních rovnic, resp. ortogonálního doplňku vektorového podprostoru), `size` a `length` (zjištění rozměrů matice a vektoru), `pinv` (pseudoinverze matice), `rref` (převod matice do Hermiteova tvaru, tedy na řádkově ekvivalentní redukovanou horní stupňovitou matici), `zeros` (příprava vektorů a matic požadovaného rozměru) a funkce pro práci s řetězci: `strrep`, `regexprep`, `findstr` a `sprintf` (pro výpis afinního podprostoru). Dále jsou používány maticové operátory.

Výhodou knihovny je, že nevyžaduje speciální funkce z toolboxů. Nevýhodou práce s datovým typem `double` je zvětšování zaokrouhlovacích chyb, např. při použití funkce `rref`, jejíž výsledek se může dokonce lišit od výsledku funkce `rank`. Tuto nevýhodu by bylo možno odstranit, pokud by se všechny funkce přepsaly do symbolické matematiky, avšak to už by vyžadovalo nainstalovaný Symbolic Math Toolbox.

3.3 Ukázky implementace

Na konci tohoto příspěvku naleznete ukázky zdrojových kódů. Z důvodu úspory místa jsou vynechány řádky nápovědy a případná kontrola vstupních dat. Zdrojový kód konstruktoru `afprostor` je uveden na obrázku 1, následují zdrojové kódy metod `char` (obrázek 2), která vypíše řetězec popisující afinní podprostor, `soustava` (obrázek 3) – vrací matici soustavy normálových rovnic a vektor pravých stran, `subsasgn` (obrázek 4) pro vynásobení některé z rovnic soustavy normálových rovnic nenulovým číslem – změní vlastnost `soustava` daného objektu, a přetíženého operátoru `*` (obrázek 5), který vrací průnik dvou afinních podprostorů. Aliasem této funkce je metoda `prunik`. Kompletní zdrojové kódy knihovny `afprostor` si můžete vyžádat prostřednictvím e-mailu (dana.majerova@fjfi.cvut.cz).

4 Ukázky použití knihovny `afprostor`

4.1 Vyjádření afinního podprostoru

Příklad 1. Je dán afinní podprostor $L = [(1,1,1),\ (1,2,2),\ (1,3,-1),\ (1,4,0)]_\alpha$. Nalezněte jeho parametrické vyjádření a soustavu normálových rovnic, která jej popisuje. Rozhodněte, zda jsou zadané body afinně nezávislé.

Řešení pomocí MATLABu:

```
>> L = afprostor([1,1,1; 1,2,2; 1,3,-1; 1,4,0],'a') % zadani
L ... afinni podprostor (jako afinni obal bodu):
[(1,1,1), (1,2,2), (1,3,-1), (1,4,0)]_a

>> char(L,'p') % parametricky
ans =
(1,1,1) + [(0,1,1), (0,2,-2), (0,3,-1)]

>> S = baze_smer(L) % baze smeroveho podprostoru - afinni nezavislost?
S =
     0     1     1
     0     2    -2

>> char(L,'n') % soustava normalovych rovnic
ans =
x_1=1
```

Tabulka 2: Přehled vlastností třídy `afprostor`

Vlastnost	Význam
`zadani`	matice, kterou zadal uživatel při vytváření objektu
`vyjadreni`	řetězec označující formu zadání objektu (`'p'`, `'n'`, `'a'`)
`smer`	generátory zaměření
`normal`	generátory normálového podprostoru
`bod`	bod $\boldsymbol{a}$ z parametrického vyjádření $L = \boldsymbol{a} + S$
`soustava`	soustava normálových rovnic jako rozšířená matice $(\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{b})$
`smerB`	báze zaměření
`normalB`	báze normálového podprostoru
`af_obal`	body afinního obalu (i afinně závislé)
`af_obalB`	afinně nezávislé body afinního obalu
`dim`	dimenze

Tabulka 3: PŘEHLED METOD TŘÍDY `afprostor`

Název metody	**Popis činnosti, resp. výstupních hodnot**
vytvoření afinního podprostoru	
`afprostor`	konstruktor (vytvoření afinního podprostoru z řádků matice)
převod na řetězec apod.	
`display`	výpis afinního podprostoru do Command Window
`char`	řetězec obsahující zadání afinního podprostoru
`latex`	řetězec obsahující zadání afinního podprostoru (LaTeX)
převod na datový typ `double`	
`smer`	matice, jejíž řádky jsou generátory směrového podprostoru
`baze_smer`	matice, jejíž řádky tvoří bázi směrového podprostoru
`normal`	matice, jejíž řádky jsou generátory normálového podprostoru
`baze_normal`	matice, jejíž řádky tvoří bázi normálového podprostoru
`afobal`	matice, jejíž řádky jsou body afinního obalu
`bod_smer`	vektor (bod $\boldsymbol{a}$) a matice (řádky jsou generátory S)
`soustava`	matice soustavy a vektor pravých stran
informace o afinním podprostoru	
`dim`	dimenze afinního podprostoru
`druh`	řetězec určující druh afinního podprostoru
`je_prvkem`	logická hodnota (1 ... $\boldsymbol{x} \in L$, 0 ... $\boldsymbol{x} \notin L$)
`subsasgn`	změna jedné rovnice soustavy (vynásobení číslem $a \neq 0$
`subsref`	vektor, který je prvkem afinního podprostoru
`kresli`	vykreslení afinního podprostoru – pouze v $\mathbb{E}_2$ nebo $\mathbb{E}_3$
práce se dvěma afinními podprostory	
`mtimes`	průnik dvou afinních podprostorů – objekt
`prunik`	alias k metodě `mtimes`
`plus`	součet dvou afinních podprostorů – objekt
`soucet`	alias k metodě `plus`
`poloha`	řetězec udávající vzájemnou polohu 2 afinních podprostorů
`vzdalenost`	vzdálenost dvou afinních podprostorů
`uhel`	výpočet úhlu mezi dvěma afinními podprostory

Interpretace výsledků:

Směrová rovnice afinního prostoru je například $L = (1,1,1)+[(0,1,1),\ (0,2,-2),\ (0,3,-1)]$. Protože báze směrového podprostoru obsahuje dva vektory, tak lze směrovou rovnici zjednodušit na tvar $L = (1,1,1) + [(0,1,1),\ (0,2,-2)]$. Parametrické vyjádření afinního podprostoru je $x_1 = 1 \ \wedge\ x_2 = 1+t_1+2t_2 \ \wedge\ x_3 = 1+t_1-2t_2$. Body jsou afinně závislé, neboť báze směrového podprostoru obsahuje dva (nikoli tři) vektory. Soustava normálových rovnic má tvar $x_1 = 1$ (v prostoru $\mathbb{E}_3$!).

Příklad 2. Je dán afinní podprostor $L_2 \equiv x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -6$ v $\mathbb{E}_4$. Nalezněte jeho parametrické vyjádření, vyjádřete jej pomocí afinního obalu a dále určete jeho dimenzi a druh.

Tabulka 4: PRIVÁTNÍ FUNKCE

Název funkce	**Význam**
`baze`	výběr báze ze souboru generátorů
`smer`	výpočet generátorů směrového podprostoru z afinního obalu bodů
`afinni_obal`	výpočet afinního obalu z parametrického vyjádření
`vec2str`	výpis jednoho vektoru jako řetězec (n-tice čísel)
`vec2rce`	převod jednoho řádku rozšířené matice soustavy na řetězec

Řešení pomocí MATLABu:

```
>> L2 = afprostor([1 -2 -3 1 -6],'n')
L2 ... afinni podprostor (neparametricky v E^4):
x_1-2x_2-3x_3+x_4=-6

>> char(L2,'p')
ans =
(-6,0,0,0) + [(2,1,0,0), (3,0,1,0), (-1,0,0,1)]

>> char(L2,'a')
ans =
[(-6,0,0,0), (-4,1,0,0), (-3,0,1,0), (-7,0,0,1)]_a

>> dim(L2)
ans =
     3

>> druh(L2)
L2 je nadrovina v E_4
```

Interpretace výsledků:

Směrová rovnice má tvar $L_2 = (-6,0,0,0)+[(2,1,0,0),\ (3,0,1,0),\ (-1,0,0,1)]$ a vyjádření pomocí afinního obalu je například $L_2 = [(-6,0,0,0),\ (-4,1,0,0),\ (-3,0,1,0),\ (-7,0,0,1)]_\alpha$. L_2 je afinní podprostor dimenze 3, tedy nadrovina v $\mathbb{E}_4$.

Příklad 3. Je dán afinní podprostor $L_3 = (2,0,2,1) + [(1,0,-1,0),\ (2,0,1,-1)]$. Nalezněte soustavu normálových rovnic, která jej popisuje. Rozhodněte, zda bod $\boldsymbol{b} = (3,0,4,0)$ je prvkem L_3. Určete dimenzi a druh afinního podprostoru.

Řešení pomocí MATLABu:

```
>> L3=afprostor([2,0,2,1; 1,0,-1,0; 2,0,1,-1]) % 'p' je implicitni 2. vstup
L3 ... afinni podprostor (parametricky):
(2,0,2,1) + [(1,0,-1,0), (2,0,1,-1)]

>> char(L3,'n')
ans =
x_2=0, 0.333333x_1+0.333333x_3+x_4=2.33333

>> L3(2)=3; % vynasobeni 2. rovnice cislem 3
VYSLEDEK: x_2=0, x_1+x_3+3x_4=7

>> char(L3,'n')
ans =
x_2=0, x_1+x_3+3x_4=7

>> je_prvkem(L3,[3,0,4,0])
ans =
     1

>> dim(L3)
ans =
     2

>> druh(L3)
L3 je rovina
```

Interpretace výsledků:

L_3 je rovina v $\mathbb{E}_4$ určená rovnicemi $x_2 = 0 \ \wedge\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 7$ a $\boldsymbol{b} \in L_3$.

4.2 Průnik a součet afinních podprostorů

Příklad 4. Nalezněte průnik přímek $P_1 = (2,1,1,3,-3) + [(2,3,1,1,-1)]$ a $P_2 = (1,1,2,1,2) + [(1,2,1,0,1)]$.

Řešení pomocí MATLABu:

```
>> P1 = afprostor([2 1 1 3 -3; 2 3 1 1 -1],'p'); % 'p' netreba uvadet
>> P2 = afprostor([1 1 2 1 2; 1 2 1 0 1]);
>> P=P1*P2 % prunik
P ... afinni podprostor (parametricky):
(-2,-5,-1,1,-1) + [(0,0,0,0,0)]
```

Interpretace výsledků: průnikem je bod $P = (-2,-5,-1,1,-1)$.

Příklad 5. Nalezněte součet a průnik a rozhodněte o vzájemné poloze afinních podprostorů $A_1 \equiv x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \wedge 2x_1 + x_3 = 0$ a $A2 = [(1,1,1,1),\ (0,1,1,1),\ (2,0,0,1),\ ()]_\alpha$.

Řešení pomocí MATLABu:

```
>> A1=afprostor([1 1 -2 -1 2; 2 0 1 0 0],'n');
>> A2=afprostor([1 1 1 1; 0 1 1 1; 2 0 0 1],'a');

>> soucet = A1+A2 %soucet
soucet ... afinni podprostor (parametricky):
(1,3,1,1) + [(-0.5,2.5,1,0), (0,1,0,1), (-1,0,0,0), (1,-1,-1,0)]

>> prunik = A1*A2 % prunik
prunik ... afinni podprostor (parametricky):
(1,-2,-2,1) + [(0,0,0,0)]

>> poloha(A1,A2)
ruznobezne

>> druh(A1), druh(A2), druh(soucet)
A1 je rovina
A2 je rovina
soucet je E^4
```

Interpretace výsledků: součtem zadaných afinních podprostorů je celý prostor $\mathbb{E}_n$. Průnikem rovin A_1 a A_2 je bod $(1,-2,-2,1)$. Zadané afinní podprostory jsou různoběžné.

Příklad 6. Nalezněte průnik rovin v $\mathbb{E}_3$: $R_1 \equiv x + y - 3z = -9$, $R_2 \equiv x - y + z = -1$.

Řešení pomocí MATLABu:

```
>> R1 = afprostor([1 1 -3 -9],'n');
>> R2 = afprostor([1 -1 1 -1],'n');

>> L = R1*R2 % prunik
L ... afinni podprostor (parametricky):
(-5,-4,0) + [(1,2,1)]
```

Interpretace výsledků: průnikem dvou rovin v $\mathbb{E}_n$ je přímka $L = (-5,-4,0) + [(1,2,1)]$.

Dana Majerová
Katedra softwarového inženýrství v ekonomii
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
České vysoké učení technické v Praze
telefon: 224 358 481
e-mail: dana.majerova@fjfi.cvut.cz

```
function L = afprostor(M,vyjadreni)
% @afprostor/afprostor - konstruktor pro afinni (pod)prostor
if isa(M,'afprostor')
    L = M; % kopirovaci konstruktor
    return;
else
    vyjadreni = 'p'; % implicitni je parametricke vyjadreni
end
L.zadani = M; % jak je af. prostor zadan uzivatelem
L.vyjadreni = vyjadreni; % forma zadani af. prostoru
[rM,sM] = size(M); % pocet radku a sloupcu matice M
switch vyjadreni
    case 'p' % ------- parametricke vyjadreni; smerova rovnice (L = a + SL)
        a = M(1,:); % ridici bod
        SL = M(2:end,:); % smerovy podprostor
        SL = baze(SL,0); % generatory smeroveho podprostoru
        SL_baze = baze(SL); % baze smer. podprostoru
        N = null(SL,'r')'; % normalovy podprostor
        N = baze(N,0); % generatory
        N_baze = baze(N); % baze
        if isempty(N_baze)
            soustava = zeros(1, sM+1); % soustava "0=0"
        else
            soustava = [N N*a']; % soustava normalovych rovnic
        end
        af_obal = afinni_obal(a,SL); % afinni obal
        af_obalB = afinni_obal(a,SL_baze); % afinni obal; afinne NEzavisle body
    case 'n' % ------- soustava normalovych rovnic; neparametricke vyjadreni (Ax=b)
        soustava = M; % soustava
        N = M(:,1:end-1); % matice soustavy
        if rank(N) < rank(M) % existuje reseni?
            error('Nebyl zadan afinni podprostor (soustava nema reseni)!');
        end
        N_baze = baze(N); % baze normal. podprostoru
        [R,sR]=rref(M); a=zeros(1,sM-1); a(sR)=R(1:length(sR),end)';
        SL = null(N,'r')'; % smerovy podprostor
        SL = baze(SL,0); % generatory, vyresen i trivialni podprostor
        SL_baze = baze(SL);
        af_obal = afinni_obal(a,SL);
        af_obalB = afinni_obal(a,SL_baze);
    case 'a' % ------- afinni obal -------
        af_obal = M;
        a = M(1,:); % "ridici" je prvni bod
        SL = smer(M); SL_baze = baze(SL);
        af_obalB = afinni_obal(a,SL_baze);
        N = null(SL,'r')';
        N = baze(N,0); % generatory, vyresen i trivialni podprostor
        N_baze = baze(N);
        if isempty(N_baze); soustava = zeros(1,sM+1); else; soustava = [N N*a']; end
end
L.smer = SL; L.smerB = SL_baze;   % generatory a baze smeroveho podprostoru (zamereni)
L.normal = N; L.normalB = N_baze; % generatory a baze normaloveho podprostoru
L.bod = a;                        % "ridici" bod
L.soustava = soustava;            % soustava normalovych rovnic
L.af_obal = af_obal;              % body afinniho obalu (i afinne zavisle)
L.af_obalB = af_obalB;            % afinne nezavisle body afinniho obalu
L.dim = rank(SL_baze);            % dimenze
L = class(L,'afprostor'); % vznika objekt
```

Obrázek 1: Ukázka zdrojového kódu konstruktoru

```
function s = char(L,jak)
% @afprostor/char - vypis afinniho (pod)prostoru v nezkracenem formatu
if nargin<2 % chybi-li 2. vstup
    jak = L.vyjadreni; % podle zadani v objektu L
end
switch jak
    case 'p' % parametricke vyjadreni ---------------------
        s = vec2str(L.bod); % volani privatni funkce
        if ~isempty(L.smer)
            sL = '';
            for i=1:size(L.smer,1)
                sL = [sL ', ' vec2str(L.smer(i,:))]; % prevod vektoru na retezce
            end
            sL = [' + [' sL(3:end) ']'];
        else
            sL = '';
        end
        s = [s sL];
    case 'n' % neparametricke vyjadreni -------------------
        s = '';
        for i=1:size(L.soustava,1)
            s = [s ', ' vec2rce(L.soustava(i,:))]; % volani privatni funkce
        end
        s = s(3:end);
    case 'a' % afinni obal --------------------------------
        s = '';
        if ~isempty(L.af_obal) % melo by vzdy platit
            for i=1:size(L.af_obal,1)
                s = [s ', ' vec2str(L.af_obal(i,:))]; % prevod vektoru na retezce
            end
            s = ['[' s(3:end) ']_a'];
        end
end
```

Obrázek 2: Ukázka zdrojového kódu metody `char`

```
function [A,b] = soustava(L,zkracena)
% @afprostor/soustava - soustava linearnich rovnic popisujici afinni (pod)prostor
if nargin<2
    zkracena = 1; % soustava s linearne NEZAVISLYMI RADKY (implicitni)
end
if zkracena==0
    A = L.soustava(:,1:end-1); % matice soustavy
    b = L.soustava(:,end);     % vektor pravych stran
else % vsechny ostatni hodnoty se povazuji za 'zkracena=1'
    A = L.normalB;
    b = L.normalB*L.bod';
end
```

Obrázek 3: Ukázka zdrojového kódu metody `soustava`

```
function L = subsasgn(L,i,a)
% @afprostor/subsasgn - uprava jedne rovnice soustavy (normal. vektor a prava strana)
% L(i) = a; (vynasobi i-tou rovnici soustavy cislem a, pote vypise vysledek)
% L ... afinni (pod)prostor (objekt)
% i ... index rovnice (poradi), i>=1, i<=dim(E^n)-dim(L)
% a ... nasobek rovnice (a~=0)

switch i.type
    case '()'
        k = i.subs{1};
        n = size(L.bod,2);
        if ~isa(k,'double') || ~isscalar(k) || k<1 || k>n || fix(k)~=k
            error('Chybny index (poradi rovnice)!');
        end
        if ~isa(a,'double') || ~isscalar(a) || a==0
            error('Nepovoleny nasobek!');
        end
        L.soustava(k,:) = L.soustava(k,:)*a; % vynasobeni i-te rovnice cislem a
    case '{}'
        error('Nepodporovana indexace!');
    case '.'
        error('Nepodporovana indexace!');
end
disp(['VYSLEDEK: ' char(L,'n')]) % vypis upravene soustavy
```

Obrázek 4: Ukázka zdrojového kódu metody `subsasgn`

```
function L = mtimes(L1,L2)
% @afprostor/mtimes - prunik dvou linealu
% L = L1 * L2
% L1,L2 ... afinni podprostory (objekty) nebo jeden je afinnim obalem bodu (matice)
% L ... prunik (objekt) - pokud prunik neexistuje, vysledkem je chyba

if ~isa(L1,'afprostor'); L1 = afprostor(L1,'a'); end % af. obal na objekt
if ~isa(L2,'afprostor'); L2 = afprostor(L2,'a'); end % af. obal na objekt
m1 = size(L1.bod,2); % dimenze E_n
m2 = size(L2.bod,2);
if m1~=m2
    error('Prunik neexistuje (afinni prostory jsou z ruznych E^n)!');
end
% vypocet pruniku
A = [L1.normalB; L2.normalB];
b = [L1.normalB*L1.bod'; L2.normalB*L2.bod'];
if rank(A)~=rank([A b])
    error('Prunik je prazdny (neexistuje)!');
end
% vytvoreni objektu
L = afprostor([A b], 'n');
L.zadani = [L.bod; L.smerB]; % prevod na parametricke vyj.
L.vyjadreni = 'p';
```

Obrázek 5: Přetížený operátor `mtimes` pro průnik afinních podprostorů