TRANSPORT VLHKOSTI VE VZORCÍCH IZOLAČNÍCH MATERIÁLŮ

Gunnar Kűnzel, Miloslav Linda

Abstract

V příspěvku jsou uvedeny analogie veličin a parametrů při transportu vlhkosti vzorkem materiálu ve formě desky a v elektrickém obvodu. Uvedená analogie umožňuje řešit stacionární i nestacionární výměnu vlhkosti přes jednoduchou nebo složenou stěnu. Je ukázán přechod od úlohy šíření vlhkosti v izolační desce s rozloženými parametry k úloze šíření vlhkosti se soustředěnými parametry a na tomto základě je dán analytický popis nestacionárních procesů šíření vlhkosti v ploché desce. S použitím Laplaceovy transformace je možno získat přenosové funkce, určující základní dynamické charakteristicky ploché desky (stěny). Získané přenosové funkce procesu šíření vlhkosti pak umožňují provést analýzu a syntézu systémů automatické regulace vlhkosti v prostředí MATLAB – Simulink.

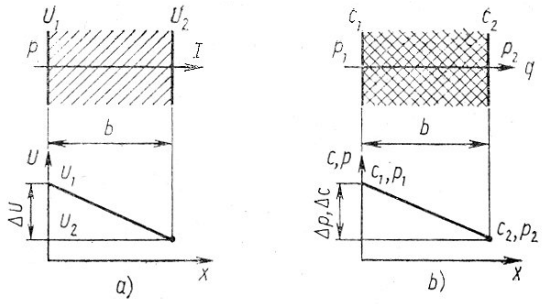
1 Úvod

V mezích platnosti lineární teorie jsou procesy přenosu vlhkosti analogické procesům v elektrickém obvodu. Vzhledem k tomu, že teorie elektrických obvodů je zkoumána mnohem hlouběji než procesy transportu vlhkosti a mnohé typy procesů včetně nestacionárních jsou popsány analyticky, je možné na základě metody analogie použít analytický popis elektrických procesů. V tab. I. jsou uvedeny tyto analogie.

2 Materiál a metody

Stacionární proces přenosu přes plochou rovnoběžnou stěnu (desku). Při stacionárním (ustáleném) procesu přenosu v desce nedochází k akumulaci předávané vlhkosti, (elektrického napětí); na hranicích desky jsou zadány hodnoty koncentrace *c (U)*. V elektrickém obvodu podle Ohmova zákona

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{\Delta U}{R} \qquad (1)$$



Obrázek 1a,b) Rozložení elektrického napětí a koncentrace vlhkosti při stacionárním procesu.

Při přenosu vlhkosti a zadání tlaku vodních par p_1, p_2 na hranicích desky dostaneme I. Fickův zákon v následujícím tvaru:

$$q = -P.S.\frac{\partial p}{\partial b} = -P.S.\frac{p_2 - p_1}{b} = P.S.\frac{p_1 - p_2}{b} = P.S.\frac{\Delta p}{b} \qquad (2)$$

kde q – hmotnostní tok vlhkosti [kg/s]

P koeficient přenosu vlhkosti [s],

b *[m]* tloušťka stěny,

S *[m^2]* plocha desky,

p *[Pa]* tlak vodních par

Tabulka 1 Analogie veličin a parametrů přenosu vlhkosti a elektrického obvodu

Vlhkost	**Elektrický obvod**
čas τ *[s]*	čas τ *[s]*
přenášená hmotnost vlhkosti *M [kg]*	přenášený náboj Q_e *[A.s]*
hmotnostní tok vlhkosti *q [kg.s]* $q = \frac{dM}{d\tau}$	elektrický proud *I [A]* $I = \frac{dQ_e}{dt}$
rozdíl tlaku vodních par *Δp [Pa]*	rozdíl napětí *ΔU [V]*
rozdíl koncentrace vlhkosti *ΔC [kg.m^3]* *ΔC =h. Δp*	ΔU [V]
koeficient průniku (přenosu) vlhkosti *P [s]* difuzní propustnosti	měrná vodivost σ *[$\Omega^{-1}m^{-1}$] = [$S.m^{-1}$]*
koeficient *h [$s^2.m^{-2}$]* koeficient šíření vlhkosti v tělese, materiálu, vzduchu	měrná objemová kapacita *C [$F.m^{-3}$]* nebo měrná povrchová kapacita, vzhledem k tomu, že náboje v objemu jsou rozloženy na povrchu
koeficient difuze *D [$m^2.s^{-1}$]* $D = \frac{P}{h}$	$\frac{\sigma}{C}[m^2.s^{-1}]$
vlhkostní odpor ploché desky R_v *[$m^{-1}s^{-1}$]* $R_v = \frac{b}{P.S} = \frac{b}{h.D.S}$ *S* [plocha]	elektrický odpor ploché stěny $R = \frac{b}{\sigma.S}[\Omega]$

kde $R = \frac{b}{\sigma.S}[\Omega]$

b [m]– tloušťka stěny,

σ *[$\Omega^{-1}.m^{-1}$]* – koeficient měrné elektrické vodivosti materiálu stěny

S *[m^2]* – plocha stěny.

Při zadání koncentrace vlhkosti v povrchových vrstvách s ohledem na vztah $c = h.p$, dostaneme I. Fickův zákon ve tvaru

$$q = -\frac{P.S}{h}.\frac{\partial c}{\partial b} = -D.S.\frac{\partial c}{\partial b} = D.S.\frac{c_1 - c_2}{b} = D.S.\frac{\Delta c}{b}$$

Zavedeme veličinu R_v, která se v analogii nazývá vlhkostní odpor ploché desky [$m^{-1}s^{-1}$]

$$R_v = \frac{b}{P.S} = \frac{b}{h.D.S} \qquad (3)$$

Proto platí na základě (2) a (3), že

$\Delta p = q.R_v$

$\Delta C = q.R_v.h$

Měřicími přístroji je obtížné měřit koncentraci vlhkosti v povrchové vrstvě, protože je podél tloušťky rozložena nerovnoměrně. Hodnotu *c* se daří změřit přímými metodami pouze pro materiál, nacházející se v rovnovážném stavu s okolním vzduchem, u něhož máme hodnotu tlaku vodních par p pro rovnovážný stav koncentrace vlhkosti $c = hp$.

3 Výsledky a diskuze

Případ 1 - Stacionární přenos přes složenou paralelní stěnu (desku)

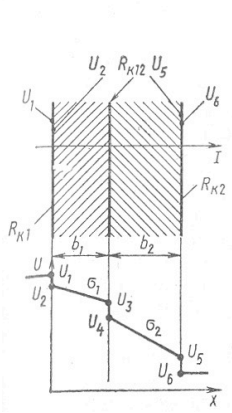
V tomto případě v procesu přenosu v desce také nedochází akumulaci vlhkosti, ale tok vlhkosti postupně prochází několika vlhkostními (elektrickými) odpory.

V elektrickém obvodu je

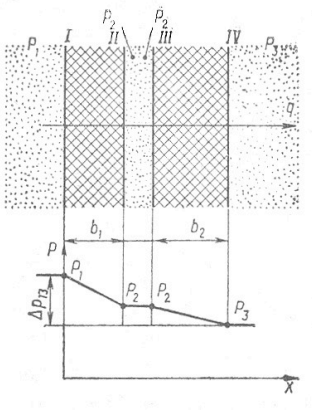
$$\Delta U = U_1 - U_6 = I.\sum_{i=1}^{n} R_i = I.(R_{k1} + R_1 + R_{k12} + R_2 + R_{k2}) \qquad (4)$$

kde R_{k1}, R_{k2}, $R_{k1,2}$ – kontaktní odpory na hranicích a mezi vrstvami desky [Ω]

$$R_1 = \frac{b_1}{\sigma_1.S} \qquad R_2 = \frac{b_2}{\sigma_2.S}$$



Obrázek 2a) Rozložení elektrického napětí při stacionárním procesu přenosu elektřiny přes složenou plochou



Obrázek 2b) Přenos tlaku vodních par při stacionárním procesu přenosu vlhkosti přes složenou plochou desku.

Při přenosu vlhkosti přes složenou stěnu (desku) na jejichž hranicích jsou zadány hodnoty tlaku vodních par p, získáme dle analogie rovnici:

$$\Delta p = p_1 - p_3 = q.\sum_{i=1}^{n} R_{vi} = q.(R_{vk1} + R_{vIII} + R_{vIIII} + R_{vIIIIV} + R_{vkIV}) \qquad (5)$$

kde $R_{vk\,I}$, $R_{vk\,IV}$ – vlhkostní odpory na hranicích I, IV. *[$m^{-1}s^{-1}$]*

$R_{v\,II\,III}$ vlhkostní odpor v místě styku, $R_{vIIII} = \frac{b_1}{p_1.S}$;

$R_{vIIIIV} = \frac{b_2}{p_2.S}$ jsou vlhkostní odpory vrstev složené stěny (desky) *[$m^{-1}s^{-1}$]*

Na obr. 2 je styk mezi vrstvami záměrně zobrazen zvětšen v příslušném místě. V reálných konstrukcích vzduchová mezera styku závisí na mnoha faktorech, např. na mikrogeometrii hraničních povrchů II a III.

V případě, že v mezeře chybí lepidlo nebo jiná pevná vložka mezi povrchy II a III- se zde bude nacházet malé množství vzduchu s tlakem vodních par p_2. Vzhledem k tomu, že difuze v plynu (vzduchu) probíhá asi $10^5 – 10^8$x rychleji než ve tvrdém tělese, tlak vodních par u povrchů II a III bude prakticky stejný, což je vidět i na obr. 2b. (úsek p_2-p_2),

To znamená, že v místě styku mezi vrstvami (za přítomnosti malého množství vzduchu) nedochází k úbytku tlaku vodních par při přenosu přes stěn hmotnostního toku q, tj. v místě styku je vlhkostní odpor prakticky roven nule (ve srovnání s vlhkostními odpory pevných částí složené desky).

Proto $R_{vIIII} = 0$

Ze stejných příčin jsou vlhkostní odpory R_{vk1} a $R_{vkIIIIV}$ na hranicích I a IV také rovny nule. (ve srovnání s R_{vIII} a R_{vIIIIV})

Vzhledem k těmto zjednodušením platí

$$\Delta p = p_1 - p_2 = q.\sum_{i=1}^{n} R_{vi} = q.\left(\frac{b_1}{p_1.S} + \frac{b_2}{p_2.S}\right) \qquad (6)$$

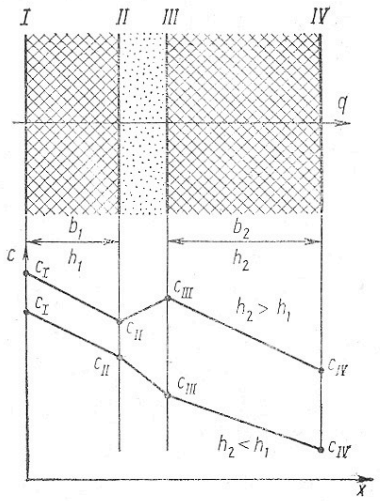
Pro přenos tlaku v libovolné vrstvě pak platí na základě předchozí rovnice že

$$\Delta p_i = q.R_{vi} = \frac{\Delta p.R_{vi}}{\sum_{i=1}^{n} R_{vi}} \qquad (7)$$

Při řešení úlohy přenosu vlhkosti přes složenou desku, na jejichž hranicích I a IV nejsou zadány tlaky p_1 a p_3 vodních par, ale koncentrace vlhkosti c_1 v povrchové vrstvě I a c_{IV} v povrchové vrstvě IV pro složené desky z různých materiálů nelze získat rozložení koncentrací podél tloušťky, protože koeficienty h_1 a h_2 jsou různé. Pro řešení takové úlohy je třeba přejít od koncentrace na hranicích k tlakům vodních par p dle vztahu

$$p_a = \frac{c_v}{h_v} = \frac{c_N}{h_M} \qquad (8)$$

c_v, c_N, koncentrace vlhkosti ve vzduchu, ve vrstvě materiálu a s využitím vztahů (6), (7) najít rozložení tlaku a koncentrace. Přitom ve stěnách z různých materiálů v zóně styku dochází ke změně koncentrace (viz obr. 3).



Obrázek 3 – Rozložení koncentrace při stacionárním procesu přenosu vlhkosti přes složenou plochou desku (stěnu)

Případ 2 - Nestacionární výměna vlhkosti v tenké stěně a metodika řešení těchto úloh

Analogie uvedené v tab. 1 lze použít i pro popis nestacionárních procesů.

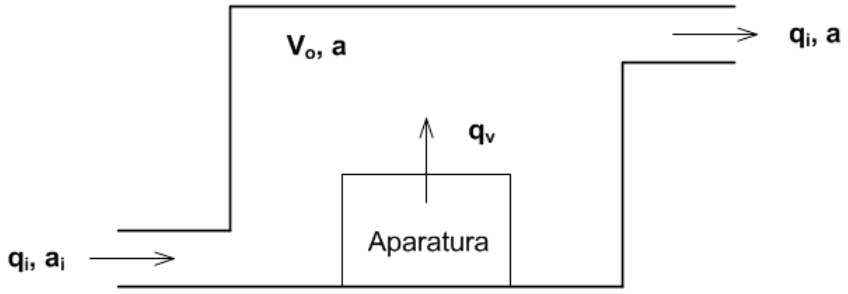
Nestacionární výměnu vlhkosti mnohých prvků aparatury je možno vyšetřovat v prvním přiblížení jako nestacionární výměnu vlhkosti ploché desky (pohlcující vlhkost) s okolním prostředím.

Řešení dané úlohy probíhá podle následujících kroků:

1) Je vyšetřena difuze vlhkosti v ploché desce na základě klasické teorie [1]; pro každou zónu desky (stěny) získané analytické závislosti koncentrace hmotnostního toku přenášené hmoty vlhkosti na čase, dovolují určit libovolný z těchto parametrů. Ovšem tyto analytické závislosti nevyhovují pro inženýrské výpočty ani pro formulaci teorie řízení vlhkosti.
2) Je provedeno přiblížení (aproximace) přesných závislostí s cílem jejich získání ve formě modelů, vhodných pro použití v teorii systémů automatické regulace. Je dána analýza shody přesných závislostí a přibližných modelů.
3) Je ukázán přechod od úlohy šíření vlhkosti s rozloženými parametry k úloze šíření vlhkosti se soustředěnými parametry a na tomto základě je dán analytický popis nestacionárních procesů šíření vlhkosti v ploché desce. S použitím Laplaceovy transformace je možno získat přenosové funkce, určující základní dynamické charakteristicky ploché desky (stěny)
4) Získané přenosové funkce procesu šíření vlhkosti pak umožňují provést analýzu a syntézu systémů automatické regulace vlhkosti.

Box s proudícím vzduchem kolem aparatury

Počáteční podmínky: objem vzduchu v boxu V_0, počáteční absolutní vlhkost vzduchu v boxu a_0, aparatura uvnitř boxu (obr. 4) vzhledem k pohlcení vlhkosti je ekvivalentní ploché desce s plochou S, tloušťkou b, koeficientem difuze vlhkosti D a koeficientem šíření vlhkosti v materiálu stěny h_M.



Obrázek 4 Aparatura uvnitř boxu s proudícím vzduchem

Obtékání se vede vzduchem s objemovým tokem q_i a absolutní vlhkostí a_i, přitom vzduch v boxu má koncentraci vlhkosti rovnou a_0. Je třeba určit změnu absolutní vlhkosti vzduchu v závislosti na čase v boxu.

Jestliže $a_i < a_0$, pak obtékání vede k vysušování vzduchu v boxu a vysušování aparatury.

Jestliže $a_i < a_0$, dochází ke zvlhčování vzduchu uvnitř boxu i zvlhčení aparatury (např. při natékání vlhkého vzduchu zvenku. Při obtékání (proudění) vzduch do boxu postupuje přes vstupní štěrbinu a vystupuje přes výstupní štěrbinu. Při mísení vzduchu se jeho vlhkost mění a v důsledku toho se mění vlhkost v aparatuře. Výsledkem všech těchto procesů bude postupná změna jak vlhkosti vzduchu uvnitř boxu, tak i koncentrace vlhkosti ve stěnách aparatury.

Základní rovnice procesu výměny vlhkosti dostaneme při uvažované bilanci vlhkosti ve vzduchu uvnitř boxu.

$$q_{i.}.a_i dt + q_v dt - q_i.a dt = V_0 da \tag{9}$$

Na levé straně rovnice představuje první člen množství vlhkosti, postupující s obtékajícím vzduchem, druhý člen množství vlhkosti vystupující z aparatury při jejím sušení a třetí člen množství vlhkosti, odcházející ve vytékajícím toku vzduchu, pravá strana rovnice popisuje změnu vlhkosti, obsažené v objemu vzduchu V_0.

Z rovnice 9 po transformaci dostaneme

$$a_i + \frac{q_v}{q_i} - a - \frac{V_0}{q_i}\frac{da}{dt} = 0 \tag{10}$$

Zapíšeme rovnici 9 v Laplaceových obrazech, přitom a_i = konst., q_i = konst.

$$\frac{a_i}{s} + \frac{1}{q_i}.q_v(s) - a(s) - \frac{V_0}{q_i}.s.a(s) + \frac{V_0}{q_i}.a_0 = 0 \tag{11}$$

Veličina $q_v(s)$ má tvar

$$q_v(s) = \frac{\frac{1}{s}\frac{h_m}{h_v}.a_0 - \frac{h_m}{h_v}a(s)}{h_m.R_v}.\frac{Ts}{Ts+1} \tag{12}$$

kde $T = \frac{b^2}{2D}$ je vlhkostní časová konstanta aparatury (ekvivalentní desky)

Zavedeme veličinu $N = \frac{V_0}{q_i}$ (13)

kde N [s] – časová konstanta obtékání objemu při toku q_i obtékajícího vzduchu

$$a(s) = \frac{U(s)}{sW(s)} \tag{14}$$

kde

$$U(s) = N.T.a_0 s^2 + \left[T\left(a_i + k_1 a_0\right) + N.a_0\right]s + a_i \tag{15}$$

$$W(s) = NTs^2 + \left[T\left(k_1 + 1\right) + N\right]s + 1 \tag{16}$$

$$k_1 = \frac{1}{q_i.h_M.R_v}\frac{h_M}{h_v} = \frac{2.D.S.h_m}{q_i.b.h_v} \tag{17}$$

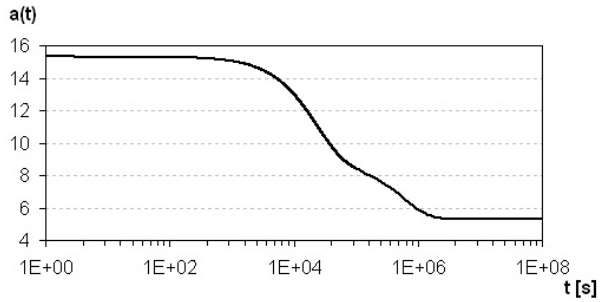
Známe-li přenos 14, provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci a určíme originál

$$a(\tau) = \frac{U(0)}{W(0)} + \frac{U(s_1)}{s_1.W'(s)}e^{s_2.\tau} + \frac{U(s_2)}{s_2 W'(s_2)}e^{s_2.\tau} \tag{18}$$

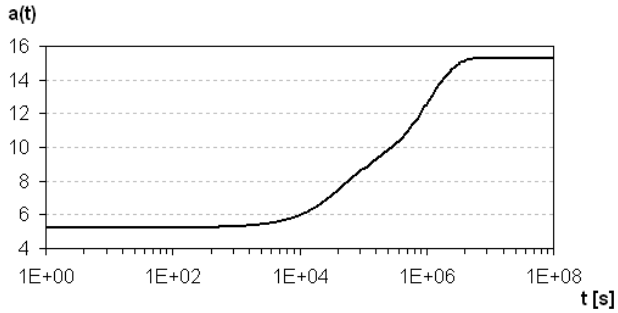
V úlohách obtékání budou parametry T, N a k_1 vždy kladné, proto kořeny s_1, s_2 budou vždy reálnými zápornými čísly. Tomu odpovídá $a(\tau)$ jako součet dvou klesajících exponenciálních křivek obr. 5 a obr. 6.

$$a(\tau) = 5{,}28.10^{-3} + 3{,}64.10^{-3}e^{-\frac{t}{57{,}5.10^4}} + 6{,}39.10^{-3}e^{-\frac{t}{2{,}32.10^4}} \tag{19}$$

$$a(\tau) = 5{,}22.10^{-3} + 6{,}9.10^{-3}(1 - e^{-\frac{t}{1{,}08.10^4}}) + 3{,}18.10^{-3}(1 - e^{-\frac{t}{4{,}12.10^4}}) \tag{20}$$



Obrázek 5 Závislost $a(\tau)$ při obtékání boxu s aparaturou první varianta.

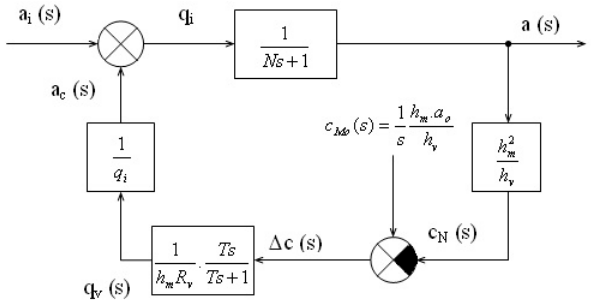


Obrázek 6 Závislost $a(\tau)$ při obtékání boxu s aparaturou druhá varianta.

Čas τ_r dosažení rovnovážného stavu vlhkosti tj. čas obtékání, v průběhu kterého vlhkost vzduchu i aparatury v boxu bude v rovnováze s vlhkostí obtékaného vzduchu a_i, vyhovuje rovnici

$$\tau_r \geq \frac{3}{s_{\min}} \tag{21}$$

kde $s_{\min}$ -je nejmenší z kořenů s_1 nebo s_2. S použitím blokového schématu v Laplaceových obrazech sestavíme v operátorové formě rovnice procesu výměny vlhkosti při libovolném a_i a též $a_i = f(\tau)$. Výše uvedená rovnice 11 je vyšetřována pouze pro a_i = konst.



Obr. 7. Blokové schéma procesu obtékání vzduchu v boxu s aparaturou.

S uvažováním nenulové počáteční podmínky dostaneme:

$$a_i(s) + a_c(s) = a(s)(1 + Ns) - Na_0 \tag{22}$$

$$a_0(s) = \frac{1}{q_i}\frac{1}{h_m.R_v}.\frac{Ts}{Ts+1}.\left[\frac{1}{s}\frac{h_m}{h_v}a_0 - \frac{h_m}{h_v}a(s)\right] \tag{23}$$

$$k_1 = \frac{1}{q_i.R_v.h_v} \tag{24}$$

a pak $$a(s) = \frac{a_i(s).(Ts+1) + N.T.a_0 s + k_1.T.a_0 + N.a_0}{N.Ts^2 + \left[T(k_1+1) + N\right]s + 1} \tag{25}$$

Rovnice 25 je obecnější než rovnice 11, protože platí pro libovolné $a_i(\tau)$ tedy pro libovolnou vlhkost a_i = konst., z rovnice 25 obdržíme rovnici 14. V blokovém schématu se vyskytuje přenos

$$W_N(s) = \frac{1}{Ns+1} \tag{26}$$

V tomto případě ve struktuře podle obr. 7 máme 2 časové konstanty, mající vliv na dynamiku změn $a(\tau)$:

-časová konstanta T charakterizuje difuzi vlhkosti ve stěně aparatury.

-časová konstanta N charakterizuje mísení obtékajícího vzduchu se vzduchem v objemu V_0.

V mnoha reálných úlohách je $T >> N$, proto v takových případech je možno vliv N zanedbat.

4 Závěr

V referátu je naznačena možnost použití fyzikální analogie mezi stacionárním i nestacionárním transportem vlhkosti ve vzorku daného materiálu a mezi jednoduchým elektrickým obvodem. Tato analogie umožňuje formulovat a řešit stacionární i nestacionární přenos vlhkosti přes jednoduchou a složenou stěnu (desku). Pomocí uvedené metodiky je řešen problém absolutní vlhkosti

aparatury,umístěné v boxu s proudícím vzduchem. Výpočty byly provedeny v prostředí MATLAB – Simulink. Získané přenosové funkce v Laplaceově tranformaci umožňují provést analýzu a systézu automatické regulace vlhkosti.

Poděkování

Poznatky prezentované v tomto článku byly získány při řešení grantu CIGA ČZU v Praze č. 20123002; 31200/1313/3130 „Parametrické hodnocení vlhkostních vlastností materiálů“.

Literatura

[1] IGUMNOV, N. I., Vlagoobmen v priborach i apparatach, Mašinostrojenie, 2004, Moskva

[2] MANN, H., Využití počítače při elektrotechnických návrzích, SNTL/Alfa, 1984, Praha

[3] PAZOUREK, J., Simulace biologických systémů, Grada, 1992, Praha

---

Ing. Gunnar Künzel, Česká zemědělská univerzita Praha, Technická fakulta, katedra elektrotechniky a automatizace, Kamýcká 129, 165 21 Praha 6 – Suchdol

Ing. Miloslav Linda, Česká zemědělská univerzita Praha, Technická fakulta, katedra elektrotechniky a automatizace, Kamýcká 129, 165 21 Praha 6 – Suchdol