

Principy metody konečných prvků a příklad jejího použití na poli akustiky

Jan Valášek

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, ČVUT

7. června 2018

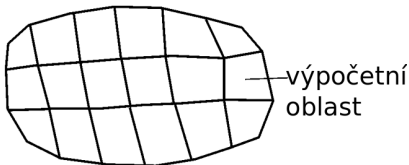
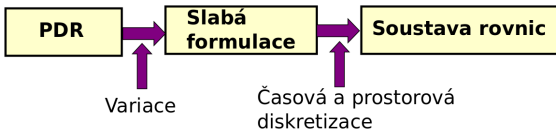


Obsah

- Vlnová rovnice
 - Základní vlastnosti
 - Řešení pomocí metody konečných prvků (MKP)
- Otázky spojené s MKP a obecně s matematickým modelováním
- Numerická simulace lidské fonace
- Závěr

Metoda konečných prvků

Metoda, jak přejít od zadání parciální diferenciální rovnice k lineární soustavě rovnic



Vlnová rovnice

Pro 1-D případ

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pro } x \in [a, b], t \in (0, T).$$



Vlnová rovnice

Pro 1-D případ

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pro } x \in [a, b], t \in (0, T).$$

Řešení lze zapsat jako součet dvou funkcí

$$p(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct),$$

kde funkce $F(x - ct)$ řeší rovnici

$$\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

Počáteční a okrajové podmínky

Počáteční podmínky

- v jaké konfiguraci se nachází náš systém v $t = 0$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_1(x).$$

Počáteční a okrajové podmínky

Počáteční podmínky

- v jaké konfiguraci se nachází náš systém v $t = 0$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_1(x).$$

Okrajové podmínky

- říkají nám, co se děje v oblasti mimo naši simulaci \implies spoluurčují zadání
- mnoho typů, různě složité dle simulovaného děje

Okrajové podmínky

Dva základní typy

- Dirichletova okrajová podmínka

$$p(x = b, t) = p_D(t), \quad t \in (0, T).$$

- Neumannova okrajová podmínka

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x = a, t) = p_N(t), \quad t \in (0, T).$$

Okrajové podmínky

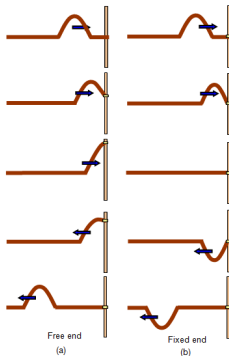
Dva základní typy

- Dirichletova okrajová podmínka

$$p(x = b, t) = p_D(t), \quad t \in (0, T).$$

- Neumannova okrajová podmínka

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x = a, t) = p_N(t), \quad t \in (0, T).$$



Vlnová rovnice ve 2D a obecně n-D

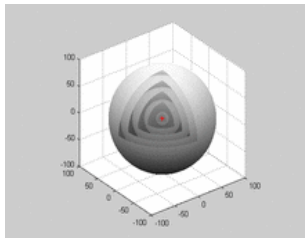
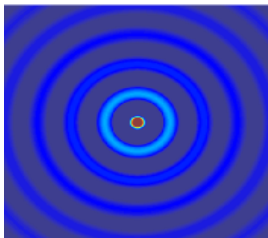
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = f(x, t) \quad \text{pro } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in (0, T).$$

neboli

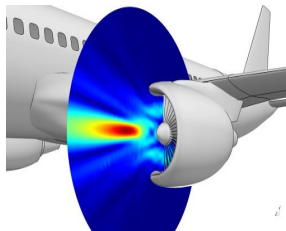
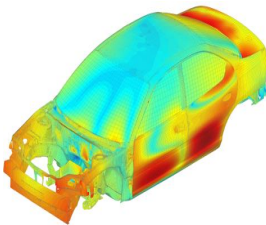
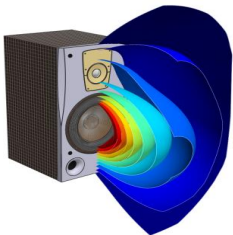
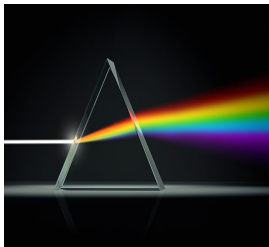
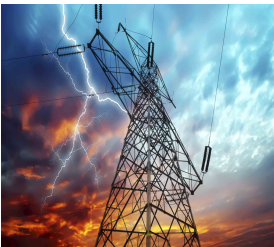
$$\frac{1}{c^2} \ddot{p} - \Delta p = f(x, t)$$

doplněnou o podmínky

$$p_0 = p_1 = 0, \quad p_D = p_N = 0.$$



Motivace – obecný popis vlnění



Odvození slabé formulace

Vynásobíme vlnovou rovnici testovací funkcí φ
a zintegrujeme přes celou oblast Ω

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \varphi \, dx - \int_{\Omega} \Delta p \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

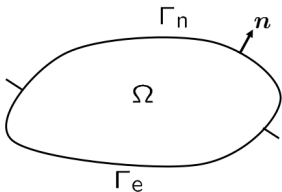
Odvození slabé formulace

Vynásobíme vlnovou rovnici testovací funkcí φ
a zintegrujeme přes celou oblast Ω

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \varphi \, dx - \int_{\Omega} \Delta p \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

Použijeme Greenovu větu (defacto integrace per-partes v n-D)

$$\int_{\Omega} \Delta p \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, dS - \int_{\Omega} \nabla p \nabla \varphi \, dx := - \int_{\Omega} \nabla p \nabla \varphi \, dx.$$



Slabá formulace

Dostali jsme novou formulaci úlohy:

řešení v čase $t = t_0$ je taková funkce $p(x, t)$, která splňuje

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx,$$

pro všechny testovací funkce $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Toto je ekvivalentní jako hledání minima funkcionalu

$$F(u) = \int_{\Omega} \frac{2}{c^2} \ddot{p}(x, t_0) u + (\nabla u)^2 + 2f u \, dx$$

na prostoru funkcí $H^1(\Omega)$ v čase $t = t_0$.

Diskrétní formulace

Aproximujeme původní prostor prostorem s konečnou dimenzí $H_h \subset H^1(\Omega)$ a bází $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{N_h}(x)$.

Pak lze hledané řešení vyjádřit jako

$$p(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \varphi_j(x).$$

Diskrétní formulace

Aproximujeme původní prostor prostorem s konečnou dimenzí $H_h \subset H^1(\Omega)$ a bází $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{N_h}(x)$.

Pak lze hledané řešení vyjádřit jako

$$p(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \varphi_j(x).$$

Po dosazení do slabé formulace dostáváme diskrétní formulaci: řešení v čase $t = t_0$ určuje vektor neznámých $\alpha_j(t_0)$, který splňuje

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^{N_h} \ddot{\alpha}_j(t) \varphi_j(x) \varphi_i(x) \, dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx,$$

pro všechny funkce $\varphi_i \in H_h$, tj. $i = 1, \dots, N_h$.

Diskrétní formulace

Tuto soustavu

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^{N_h} \ddot{\alpha}_j(t) \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j(x) \varphi_i(x) \, dx}_{m_{ij}} + \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t) \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi_j(x) \nabla \varphi_i \, dx}_{k_{ij}} = \\ = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i \, dx}_{b_i}, \end{aligned}$$

lze přepsat do maticové podoby

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}.$$

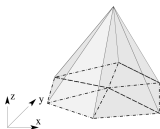
Volba báze

Náš cíl = řídké matice soustavy, efektivní algoritmus.

Prostor konečných prvků:

V_h - báze je tvořena po částech polynomiálními funkcemi Příklad

lineární bázevé funkce



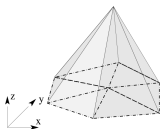
Volba báze

Náš cíl = řídké matice soustavy, efektivní algoritmus.

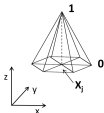
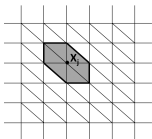
Prostor konečných prvků:

V_h - báze je tvořena po částech polynomiálními funkcemi Příklad

lineární bázevé funkce



Důvod = výpočet prvků matice



Vlastnosti metody konečných prvků

Výhody:

- Numerická efektivnost: Většina MKP matic je symetrická a řídká, to s sebou přináší rychlé řešení.
- Modelování nelinearit: Dobře zavedeno (např. hystereze, materiálové parametry atd.).
- Komplexní geometrie: Možno řešit i geometricky složité úlohy.
- Univerzální metoda: MKP lze dobře aplikovat na statické, harmonické, časově závislé problémy stejně jako na problémy vlastních čísel.

Vlastnosti metody konečných prvků

Výhody:

- Numerická efektivnost: Většina MKP matic je symetrická a řídká, to s sebou přináší rychlé řešení.
- Modelování nelinearit: Dobře zavedeno (např. hystereze, materiálové parametry atd.).
- Komplexní geometrie: Možno řešit i geometricky složité úlohy.
- Univerzální metoda: MKP lze dobře aplikovat na statické, harmonické, časově závislé problémy stejně jako na problémy vlastních čísel.

Nevýhody:

- Diskretizace: Potřeba diskretizovat celou oblast.
- Nevyřešené problémy: Např. okrajové podmínky pro simulaci ultrazvuku.

Matematické základy MKP

Užití metody konečných prvků vedlo k celé řadě otázek:

- Jak “daleko” je spočítané přibližné řešení od přesného? Konverguje k přesnému?
- Lze odhadnout chybu, které se dopustíme?
- Jaké vlastnosti má vůbec přesné řešení? **Existuje? Je jediné?**

Matematické základy MKP

- existence a jednoznačnost řešení: Laxova-Milgramova věta (1954) pro úlohu v obecném Banachově prostor V

$$a(p, \varphi) = L(\varphi)$$

což v našem případě odpovídá

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} \ddot{p} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx.$$

- V - Sobolevův prostor, $V = H^1(\Omega)$, S. Sobolev (1908 - 1989)
- Ceaovo lemma (1964)

p - přesné řešení, p_h - numerické řešení, φ_h - libovolná funkce z V

$$\|p - p_h\| \leq C \|p - \varphi_h\|$$

Matematické základy MKP

- Konvergence MKP ($h \rightarrow 0$, Ciarlet, 1968)
Pro přípustnou geometrii

$$h_K/\rho_K \leq C$$

a dobře zadanou úlohu platí *odhad chyby*

$$\|u - v_h\|_V \leq C_1 h \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

- **Předpoklady!**

Historie MKP

R. Courant



Inženýři objevili a začali používat MKP v 50. letech Vývoj matematické teorie MKP začal až na konci 60. let

- Ceaovo lemma (Cea [1964])
- A priori odhad chyby pro rovinnou pružnost, Johnson and McLay, 1968.
- Zlámal, 1968 - detailní analýza interpolačních vlastností
- Ciarlet, 1968 - důkaz konvergence lineárních konečných prvků
- 1972 Babuška, Aziz - matematické základy MKP: teorie Sobolevových prostorů, aproximační teorie
- Brezzi, Babuška, Aziz, 1974, 1972 - "INF-SUP" podmínka
- Strang, 1972 - "variační zločiny"

Cíle výpočtů a zdroje chyb

- Co je cílem výpočtů?

REALITA → MATEMATICKÝ MODEL → NUMERICKÁ APROX.

Cíle výpočtů a zdroje chyb

- Co je cílem výpočtů?

REALITA → MATEMATICKÝ MODEL → NUMERICKÁ APROX.

- Zdroje nepřesností
 1. Numerické chyby.
 - zaokrouhlovací chyby,
 - chyba aproximace (sítě),
 - variační zločiny: numerická integrace, $\Omega_h \neq \Omega$,
 - nepřesné řešení soustav lineárních/nelineárních rovnic
 2. Chyby v datech (nejistoty).
 3. Chyby v důsledku užití nesprávného matematického modelu.
- Následky chyb mohou být katastrofální.
- Správný inženýr si musí být vědomý chyb při výpočtech.

Seznam inženýrských katastrof

Inspirováno I. Babuška

- Tacoma Narrows Bridge Nov. 7, 1940
Důvod: chybný model, aerodynamické síly

Seznam inženýrských katastrof

Inspirováno I. Babuška

- Tacoma Narrows Bridge Nov. 7, 1940
Důvod: chybný model, aerodynamické síly
- Sleipner A (Offshore) platform, 23 August 1991
Důvod: nepřesná aproximace, chyba v predikovaném napětí.

Seznam inženýrských katastrof

Inspirováno I. Babuška

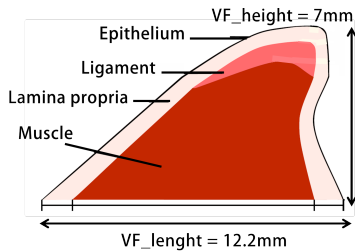
- Tacoma Narrows Bridge Nov. 7, 1940
Důvod: chybný model, aerodynamické síly
- Sleipner A (Offshore) platform, 23 August 1991
Důvod: nepřesná aproximace, chyba v predikovaném napětí.
- Selhání ARIANE 5, červen 1996
Důvod: zaokrouhlovací chyba, přetečení procesoru.

Závěr první části

- Byl stručně vysvětlen historie a princip MKP.
- MKP je robustní výkonný ale numerický nástroj (a tedy nepřesný).
- V numerických výpočtech je obtížné či nemožné odhadnout numerickou chybu, její velikost je ale důležitá.
- Numerická chyba nejsou jediným zdrojem chyb ve výpočtech, viz diagram:

REALITA → MATEMATICKÝ MODEL → NUMERICKÁ APROX.

Vocal fold model

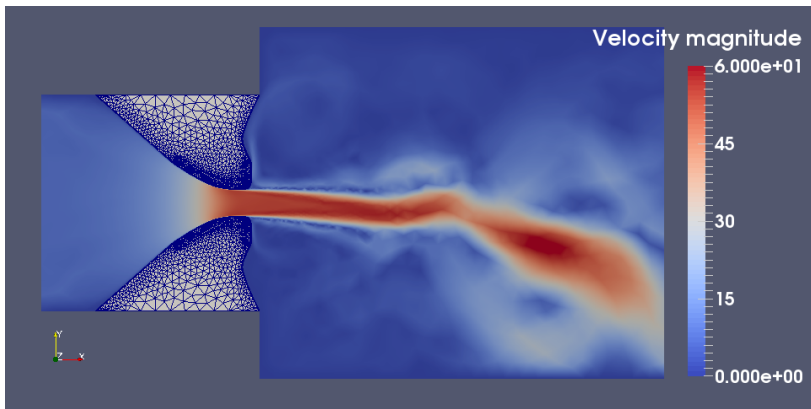


Four-layer material [S. Zoerner et al., 2013]

| Layer | Elastic modulus [kPa] | Poisson ratio |
|----------------|-----------------------|---------------|
| Epithelium | 50 | 0.45 |
| Lamina propria | 20 | 0.45 |
| Ligament | 25 | 0.45 |
| Muscle | 30 | 0.45 |

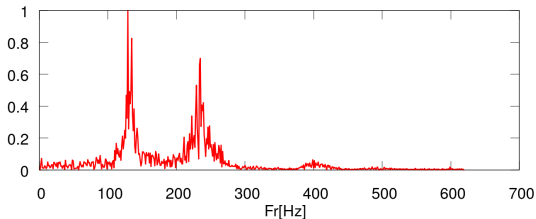
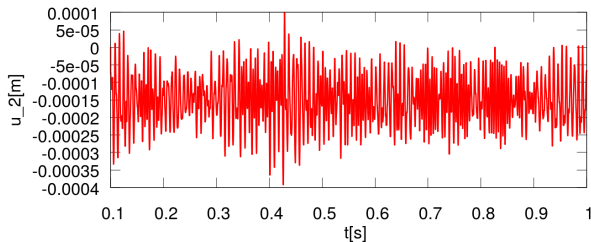
FSI simulation

Vibration driven by pressure difference $\Delta p = 1600 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3/\text{kg}$

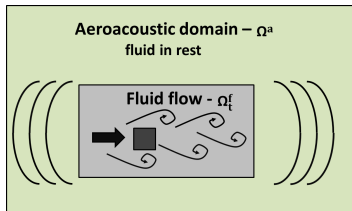


Dominant frequencies of VF motion

Fourier transform of y -direction displacement



Acoustic analogies



Lighthill analogy for $p' = p - p_0$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \rho^f v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j}.$$

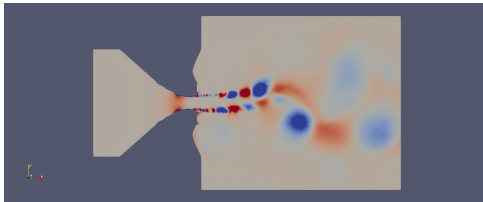
PCWE analogy can be formulated as

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \psi^a}{Dt^2} - \Delta \psi^a = -\frac{1}{\rho_0^f c_0^2} \frac{D p_{ic}}{Dt},$$

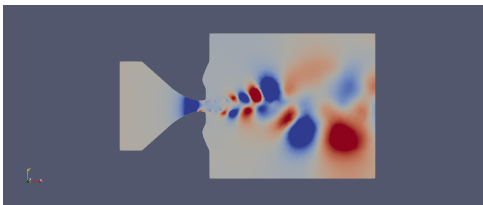
where sound sources are $\frac{D p_{ic}}{Dt} = \frac{\partial p_{ic}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_{ic}$.

Sound sources

Lighthill analogy

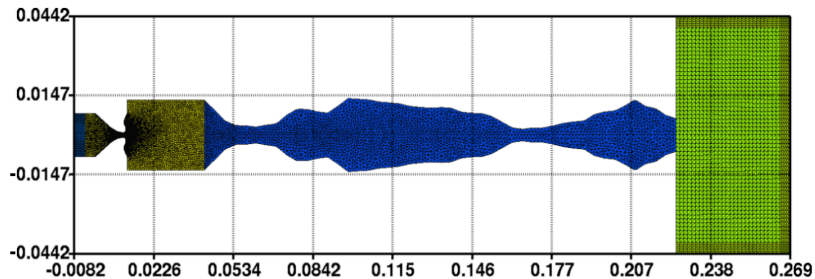


PCWE analogy

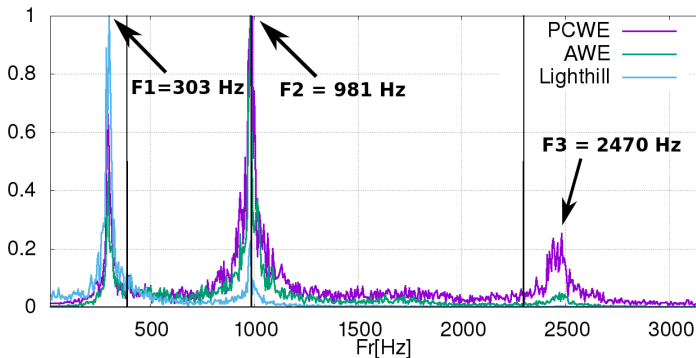


Vocal tract model

Motivated by [Story et al., 1996] for vowel [u:]



Frequency spectrum of produced sound



Highlighted formants 389, 987 and 2299 Hz, see [Story, 1996].

Conclusion

- Introduction of acoustic analogies
- Explanation of Lighthill and PCWE analogy
- FSI simulation
- Frequency spectra at mouth position

I am thankful for possibility to use academic solver CFS++ developed at TU Vienna.

Děkuji za pozornost :)